Β΄ Μέρος Τεστ 7, Μιγαδικές Συναρτήσεις Ι

Διάρκεια 90 Λεπτά

Στοιχειοθεσία: Δήμογλου Κωνσταντίνος, Μαθηματικός (Msc)

Θέμα 1

(i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(z) = \dfrac{z}{\sin z},\ z \in D(0,\pi) \setminus \{0\}$ είναι ολόμορφα επεκτάσιμη στο 0. Ποια η ολόμορφη επέκτασή της στο $D(0,\pi)$;

(ii) Υπάρχει ολόμορφη συνάρτηση f στο δίσκο $D(0,1)$ τέτοια ώστε

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = e^{-n},\ n = 2,3,\ldots;$$

Θέμα 2

Επιλέξτε τη σωστή απάντηση (με πλήρη αιτιολόγηση).

(i) f ολόμορφη στο δακτύλιο $D(0;1,3) = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 3\}$ για την οποία ισχύει $f(-2) = 2$ και

$$f(x) = x,\ 1 < x < 3.$$

(a) είναι η $f(z) = z$.
(b) είναι η $f(z) = \sqrt{z^2}$.
(c) είναι η $f(z) = |z|$.
(d) δεν υπάρχει.

(ii) Αν $f\colon D(0,2) \to \mathbb{C}$ ολόμορφη συνάρτηση με $f\left(\dfrac{i}{n}\right) = -\dfrac{1}{n^2}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε

(a) $f(z) = -|z|^2$.
(b) η f δεν μπορεί να επεκταθεί ακέραια.
(c) $f(z) = z^2$.
(d) $f(z) = -z^2$.

Θέμα 3

Έστω $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ μια ακέραια μιγαδική συνάρτηση (άρα, αναλυτική και συνεπώς έχει ανάπτυγμα γύρω από το σημείο 0 με συντελεστές $c_n,\ n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$).

(i) **(Γενίκευση του Θ. Liouville)** Υπόθέτουμε ότι για κάποιο $k \geq 0$, υπάρχουν σταθερές $A, B \geq 0$ τέτοιες ώστε $|f(z)| \leq A + B|z|^k$, για κάθε $|z| \geq R_0 > 0$. Αν $R > R_0$ με χρήση των εκτιμήσεων (ή ανισοτήτων) Cauchy αποδείξτε ότι

$$|c_n| \leq \frac{A + BR^k}{R^n},\ n = 0,1,\ldots.$$

Στη συνέχεια, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι ένα πολυώνυμο βαθμού το πολύ k.

(ii) Αν $\displaystyle\lim_{|z|\to\infty} \frac{f(z)}{z} = 0$, να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή.

ΚΑΛΗ ΤΥΧΗ!!